

Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents

Olivier BEAUDE^{1,2}, Florian DANARD¹, Benjamin LARROUSSE¹, Samson LASAULCE¹

¹L2S (CNRS - CentraleSupélec - Université Paris Sud 11)
3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif sur Yvette, France

²Département Énergie CentraleSupélec
{beaude, danard, larrousse, lasaulce}@lss.supelec.fr

Résumé – Motivé par une application issue des « Smart Grid », les « réseaux d'électricité intelligents », cet article généralise le problème de la quantification scalaire dans le cas où un agent, un *consommateur*, détermine les cellules de quantification et l'autre, un opérateur de réseau appelé *agrégateur*, les représentants. À la différence de la quantification classique où deux agents, fictifs et que l'on peut supposer ne faire qu'un, minimisent la distorsion sur les cellules et les représentants, les utilités maximisées ici par les deux agents sont distinctes. Leur différence est mesurée par un *biais* et va conduire à une réinterprétation stratégique du problème de quantification. Reprenant des outils de théorie des jeux, cet article va montrer quelques différences fondamentales entre le cas de la « quantification stratégique » et celui de la quantification classique : toutes les ressources de communication ne sont pas forcément utilisées, le biais entre utilité va fortement conditionner la quantité d'information échangée et la vitesse de convergence des méthodes analogues à l'algorithme de Lloyd-Max dans le cas stratégique.

Abstract – Motivated by an application to smart grid, this paper generalizes the problem of scalar quantization in the case in which an agent, the *consumer*, determines the quantization cells and the other agent, the electrical network operator called *aggregator*, determines the representatives. We know that the standard quantization consists of two fictitious agents, which can be identified as a single one, minimizing the distortion on the cells and on the representatives. In this paper, we consider a variation of that framework where the payoff functions maximized by the two agents are distinct. Their difference is called *bias* and implies a new strategic approach to the problem. Using tools from game theory, this work will highlight some key differences between the "strategic quantization" and the standard quantization, namely all communication resources are not necessarily used, the bias between the payoffs has an influence on the quantity of exchanged information and the speed of convergence of methods analogous to the Lloyd-Max algorithm in the strategic case.

1 La quantification stratégique : un exemple des « Smart Grid »

1.1 Le problème de « quantification stratégique »

Le problème de *quantification scalaire classique* [1] permet de représenter, approcher, un signal continu, noté ici $s \in \mathcal{S} \triangleq [0, 1]$, par un ensemble discret de valeurs $\{\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_M\}$, $M < \infty$. Ceci revient à décomposer \mathcal{S} en *cellules* de quantification S_m , $m \in \mathcal{M} \triangleq \{1, \dots, M\}$ où $S_m = [s_{m-1}, s_m]$, $s_0 = 0$, $s_M = 1$ et à déterminer un *représentant* \hat{s}_m par cellule. On notera ici en gras les vecteurs $\mathbf{s} = (s_m)_{m \in \{0, \dots, M\}}$, supposé ordonné sans perte de généralité, et $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_m)_{m \in \mathcal{M}}$. Étant donné la densité de s , $p(\cdot)$, un quantificateur optimal $(\mathbf{s}^*, \hat{\mathbf{s}}^*)$ est obtenu en minimisant la distorsion $D = \sum_{m=1}^M \int_{s_{m-1}}^{s_m} (\hat{s}_m - s)^2 p(s) ds$ sur le couple $(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}})$. Dans ce cadre, on peut supposer que deux agents (éventuellement fictifs), l'un contrôlant les seuils s_m définissant les cellules de quantification S_m et l'autre les représentants \hat{s}_m , cherchent à optimiser le même critère de performance D .

Dans cet article, nous élargirons ce cadre au cas que nous appellerons ici *quantification stratégique* où deux agents contrôlent respectivement \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$, mais ont des *intérêts divergents*. La motivation pratique est décrite sur la Fig. 1. Les deux agents considérés, un *consommateur* (électrique) noté **C** et un opé-

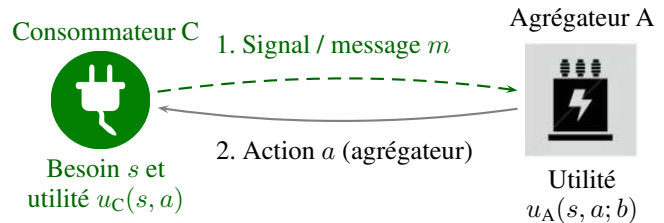


FIGURE 1 – Schéma de signal pour un modèle de Smart Grids : l'agrégateur A et le consommateur C ont des intérêts divergents dès que $b > 0$.

rateur de réseau d'électricité, appelé ici *agrégateur* [2] et noté **A**, interagissent pour allouer optimalement une quantité d'énergie au consommateur C. C a un *besoin en énergie* $s \in \mathcal{S}$ qui est inconnu de A. Néanmoins, c'est ce dernier qui doit décider d'une *énergie effectivement allouée* à C, $a \in \mathcal{S}$. **a est ainsi l'analogue du représentant \hat{s} dans le cas stratégique.** Pour informer A, un canal de communication est disponible entre C et A : un *message* $m \in \mathcal{M}$ peut être envoyé et est observé parfaitement par A. La connaissance, supposée commune, qu'ont les deux agents *a priori* sur le besoin s est représentée par la densité $p(\cdot)$. A va ainsi utiliser cette connaissance *a priori*

ainsi que le message reçu m pour faire son choix a . Les utilités des deux agents sont connaissance commune et données par $u_C(s, a) = (a - (s + \epsilon))^2$ et $u_A(s, a; b) = (a - s)^2 + bc(a)$. Les utilités en espérance *a priori* sont alors

$$U_C^\epsilon(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = - \sum_{m=1}^M \int_{s_{m-1}}^{s_m} (a_m - (s + \epsilon))^2 p(s) ds \quad (1)$$

$$U_A(\mathbf{s}, \mathbf{a}; b) = - \sum_{m=1}^M \int_{s_{m-1}}^{s_m} [(a_m - s)^2 + bc(a_m)] p(s) ds$$

avec $\epsilon \geq 0$ et $b \geq 0$. Observons tout d'abord que le message m n'intervient pas dans le calcul des utilités ; ce modèle s'inscrit ainsi dans la littérature « cheap talk » [3], où envoyer un message ne coûte rien. L'interprétation « physique » du modèle est la suivante : C se soucie uniquement de son besoin (avec la marge $\epsilon \geq 0$), alors que A se soucie de satisfaire le besoin de C mais aussi de l'état du réseau. Ce dernier est représenté par la fonction de coût $c : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, supposée régulière, strictement croissante et convexe. Elle peut typiquement modéliser le vieillissement des transformateurs (voir [4]) ou les pertes Joule si l'on se place dans un réseau de distribution d'électricité (à l'échelle d'un « quartier électrique »). Enfin, le paramètre b est la pondération attribuée par A au coût réseau. Hormis cette interprétation physique, nous retiendrons surtout par la suite que b permet de mesurer l'écart, ou *biais* pour reprendre la terminologie de la littérature des jeux de « cheap talk », entre les utilités des deux agents. Si $b = 0$ (et $\epsilon = 0$), on retrouve en effet le cas de la quantification classique, C et A maximisant l'opposé de la distorsion D. Si b est grand, les utilités des deux agents sont « fortement » distinctes et l'on s'attend intuitivement à ce que la quantification soit modifiée par cette divergence d'intérêts. C'est cette interprétation qui sera l'objet principal de cet article.

Pour compléter la description de l'interaction stratégique entre C et A, leurs *actions*, ou *stratégies*, sont maintenant décrites formellement. Pour C, il s'agit des cellules $(S_m)_{m \in \mathcal{M}}$ (ou de façon équivalente des seuils s). Envoyer le message m indique alors à A que son besoin s appartient à l'intervalle S_m . Pour A, une stratégie est un vecteur $\mathbf{a} = (a_m)_{m \in \mathcal{M}}$ où a_m est le représentant de $S_m = [s_{m-1}, s_m]$: c'est l'énergie effectivement allouée par A à C si le message reçu est m .

1.2 Premiers résultats issus de la théorie des jeux

Dans le cadre stratégique décrit ici, les outils de la théorie des jeux [5] s'appliquent directement et permettent d'obtenir des résultats intéressants sur le problème de quantification stratégique entre C et A. Définissons ainsi un *jeu de quantification stratégique* $\mathcal{G}_{M,b}$ avec ses trois composantes : 1. les *joueurs* : C et A ; 2. les ensembles d'*actions/stratégies* : $s \in \mathcal{S}^{M+1}$ et $\mathbf{a} \in \mathcal{S}^M$; 3. les *utilités* U_C^ϵ et U_A . De façon standard, nous nous intéressons ici à une configuration dans laquelle aucun des deux agents n'a intérêt à dévier unilatéralement de la stratégie qu'il est en train de jouer. Ceci est la définition d'un équilibre de Nash $(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}^*)$ défini formellement par $\forall s \in \mathcal{S}^{M+1}, U_C^\epsilon(\mathbf{s}, \mathbf{a}^*) \leq U_C^\epsilon(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}^*)$ et $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}^M, U_A(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}; b) \leq$

$U_A(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}^*; b)$. Celui-ci est obtenu quand les deux joueurs sont en *meilleure réponse* (MR) face à la stratégie de l'autre, i.e. $\mathbf{s}^* = \text{MR}^C(\mathbf{a}^*)$ et $\mathbf{a}^* = \text{MR}^A(\mathbf{s}^*)$. Formellement, la MR de C ($\text{MR}^A(\mathbf{s})$ est analogue) est définie par $\text{MR}^C(\mathbf{a}) = \{s \in \mathcal{S}^{M+1} : \forall s' \in \mathcal{S}^{M+1}, U_C^\epsilon(\mathbf{s}, \mathbf{a}) \geq U_C^\epsilon(\mathbf{s}', \mathbf{a})\}$. Ici, il est possible d'obtenir les expressions des MR des deux agents.

Proposition 1 (Caractérisation explicite des MR). *Soit M fixé. Sous l'hypothèse $p(\cdot) > 0$, et c strictement croissante et convexe,*

$$\text{MR}^C(\mathbf{a}) = \begin{cases} s_0 = 0 \\ s_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2} \text{ pour } 1 \leq m \leq M-1 \\ s_M = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{MR}^A(\mathbf{s}) = \left(\left[h^{-1} \left(2 \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} v p(v) dv}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(v) dv} \right) \right]^+ \right)_{m \in \mathcal{M}} \quad (3)$$

où : $h : a \mapsto 2a + bc'(a)$ et $[x]^+ = \max(x, 0)$.

En particulier, faire l'hypothèse d'un coût réseau quadratique $c(a) = a^2$ et d'une densité uniforme $p(s) = 1$ permet de simplifier MR^A et d'obtenir des formules explicites dans de nombreux résultats présentés par la suite.

2 Quantification stratégique : quelques différences fondamentales

2.1 Ne pas utiliser toutes les ressources de communication

La première différence fondamentale du cas avec utilité distincte est que toutes les ressources de communication ne sont pas forcément utilisées. Dans le cas de la quantification classique, ne pas utiliser tous les représentants (fixer $s_m = s_{m+1}$), ou de façon équivalente tous les bits de quantification $\log_2(M)$, est sous-optimal ce qui paraît très intuitif. Dans le cas stratégique, ceci n'est plus vrai et il existe une taille maximale pour une partition d'équilibre.

Proposition 2. *Supposons que $\epsilon > 0$ et $c'(\epsilon) > 0$. Alors il existe \bar{M}_b tel que $M \in \{1, \dots, \bar{M}_b\}$ équivaut à l'existence d'un équilibre de Nash dans le jeu $\mathcal{G}_{M,b}$.*

Démonstration. La preuve revient à montrer que les hypothèses de [3] sont vérifiées ici : 1. les hypothèses de concavité en a des utilités u_C et u_A sont vraies de façon évidente ici ; 2. Le théorème des fonctions implicites et les hypothèses sur c permettent de montrer que u_C et u_A sont *non-alignées* [3], i.e. que $\forall s \in \mathcal{S}, \arg \max_a u_C(s, a) \neq \arg \max_a u_A(s, a; b)$. \square

Précisément, la présence du biais implique qu'à l'équilibre $\exists \mu > 0 : a_{m+1}^* - a_m^* \geq \mu$ ([3], Lemme 1). Remarquons que dans le cas d'un coût quadratique côté réseau d'électricité (pertes Joule), les utilités de C et A sont *non-alignées* si et seulement si $\epsilon > 0$. Si $\epsilon = 0$, C et A ont le même choix optimal en $s = 0$ ($a^* = 0$) et $\bar{M}_b = +\infty$ dans la Prop. 2. La Tab. 1 illustre cet aspect fondamental de la quantification stratégique

TABLE 1 – Taille maximale d’une partition d’équilibre \overline{M}_b en fonction de la marge ϵ dans l’utilité de C et du biais b pour $c(a) = a^2$. Plus le biais b entre les utilités des deux agents est grand, moins les équilibres utilisent les ressources de communication, i.e. les bits de quantification.

$b \backslash \epsilon$	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}
10^{-2}	60	38	15	2
10^{-1}	22	16	8	2
0.5	11	9	5	2

ainsi que deux propriétés de monotonie : la taille maximale des partitions d’équilibre décroît avec le biais b^1 (jusqu’à obtenir la partition $[0, 1]$ qui revient à ne communiquer aucune information) ainsi qu’avec la marge ϵ .

2.2 Le biais conditionne la « quantité » d’information échangée

Dans toute la suite de cet article, nous considérons $\epsilon = 0$. Le cas de la quantification classique est donc directement obtenu quand $b = 0$. Nous allons montrer ici, dans un cas particulier qui peut être traité analytiquement, comment le biais influe sur la « quantité » d’information transmise de C à A, et mesurée ici à l’aide de l’entropie.

Prenant une fonction coût quadratique côté réseau $c(a) = a^2$ et une densité uniforme sur les besoins en énergie $\forall s \in \mathcal{S}$, $p(s) = 1$, l’unique équilibre de Nash (s^*, a^*) est $s_0^* = 0$, $\forall m \in \mathcal{M}$, $s_m^* = \frac{\alpha_+^m - \alpha_-^m}{\alpha_+^m - \alpha_-^m}$ et $a_m^* = \frac{s_{m-1}^* + s_m^*}{2(1+b)}$, avec $\alpha_{\pm} \triangleq 1 + 2b \pm 2\sqrt{b^2 + b}$. Il est obtenu en résolvant une équation de récurrence d’ordre deux qui s’écrit avec les expressions des $MR^{C,A}$ de (2) et (3). La Fig. 2 donne les partitions d’équilibre dans le cas présenté ci-dessus, illustrant en particulier comment le biais impacte la structure de la partition obtenue par rapport au cas de la quantification classique ($b = 0$). Cette différence peut être mesurée quantitativement avec l’entropie qui s’écrit $H(s) = -\sum_{m=1}^M (s_m - s_{m-1}) \log_2(s_m - s_{m-1})$ dans l’exemple traité ici. Pour $b = 0.001, 0.1$ et 2 , on trouve respectivement $H = 2.04, 1.94$ et 0.52 . Plus le biais b est important, moins C a intérêt à donner une information précise sur son besoin réel s car il sait que A prend des décisions très différentes des siennes pour chaque s .

2.3 Utilisation d’intervalles "extrêmes" de probabilité nulle

Mentionnons tout d’abord deux résultats préliminaires.

Proposition 3. Supposons que $p_{[\underline{s}, \overline{s}]} = 0$ avec $0 \leq \underline{s} < \overline{s} < 1$. Alors, les points suivants sont vérifiés : 1. C peut obtenir une utilité aussi importante en se restreignant à des seuils $s_m \in \mathcal{S} \setminus [\underline{s}, \overline{s}]$ qu’en utilisant $s_m \in \mathcal{S}$; 2. MR^A est inchangée si l’on suppose $\forall m \in \mathcal{M} : s_m \in [\underline{s}, \overline{s}] \Rightarrow s_m = \underline{s}$ ou $s_m = \overline{s}$.

1. Ceci est aussi observé dans [4] (Fig. 2) avec un coût réseau exponentiel, représentant le vieillissement des transformateurs.

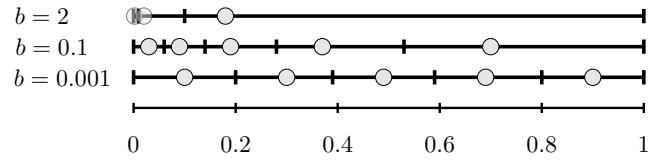


FIGURE 2 – Partitions d’équilibre pour $M = 5$, $p \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $c(a) = a^2$ et $b \in \{0.001, 0.1, 2\}$. Les $M + 1$ tirets verticaux sont les actions de C, s_m , les cercles gris les M représentants choisis par A, a_m . Pour des petites (resp. grandes) valeurs de b , la partition d’équilibre est proche de la « partition uniforme » - cas de la quantification classique où l’on échange le « maximum » d’information - (resp. de $[0, 1]$ - échange du « minimum » d’information -).

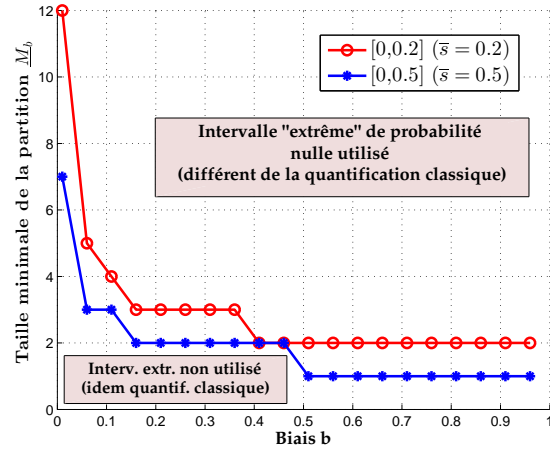


FIGURE 3 – Taille minimale d’une partition d’équilibre utilisant un intervalle de probabilité nulle, $c(a) = a^2$. Quand le biais b est petit (resp. grand), on retrouve le cas de la quantification où les intervalles de probabilité nulle ne sont pas utilisés (resp. les équilibres de toute taille M utilisent cet intervalle).

Observons maintenant que, même dans la quantification classique, un intervalle de probabilité nulle peut être utilisé par A : prendre par exemple une gaussienne seuillée centrée en $(\underline{s} + \overline{s})/2$ avec probabilité nulle sur $[\underline{s}, \overline{s}]$. Par contre, si l’on suppose que l’intervalle de probabilité nulle est "extrême", i.e. $\underline{s} = 0$ ou $\overline{s} = 1$, cela n’est plus le cas. Dans le cas de la quantification stratégique, un tel intervalle peut être utilisé comme le montre l’exemple suivant. Fixons ici $[\underline{s}, \overline{s}] = [0, \overline{s}]$ et $p_{[\underline{s}, 1]} = \frac{1}{1-\overline{s}}$ (distribution uniforme avec un sous-intervalle de probabilité nulle). D’après la Prop. 3, on peut supposer $s_0 = \overline{s}$ et, en résolvant le système récurrent d’ordre deux caractérisant l’équilibre, on trouve en particulier $s_1 = 4\sqrt{b^2 + b} / [\alpha_+^M - \alpha_-^M] + [\alpha_+^{M-1} - \alpha_-^{M-1}] / [\alpha_+^M - \alpha_-^M] \overline{s}$ de manière à avoir $s_M = 1$. La condition sous laquelle A utilise $[0, \overline{s}]$, $a_1 = \frac{\overline{s} + s_1}{2(1+b)} < \overline{s}$, devient $4\sqrt{b^2 + b} + [\alpha_+^{M-1} - \alpha_-^{M-1} - (1 + 2b)(\alpha_+^M - \alpha_-^M)] \overline{s} < 0$. Comme l’illustre la Fig. 3, ceci permet en particulier d’obtenir une taille minimale de partition \overline{M}_b à partir de laquelle un intervalle donné (i.e. pour un \overline{s} donné) de probabilité nulle sera utilisé par A, à la différence de la quantification classique.

Remarque : $p(\cdot) > 0 \Rightarrow s_m \in [a_m, a_{m+1}]$ et $a_m \in [s_{m-1}, s_m]$,

contrairement à l'exemple donné ci-dessus.

2.4 Convergence d'une méthode itérative de calcul des partitions d'équilibre

Pour les applications pratiques, l'étude de méthodes de calcul des partitions d'équilibre est indispensable. Dans le cas de la quantification classique ($b = 0$), la méthode de Lloyd-Max [1] permet de simplifier la détermination d'un quantificateur optimal en recherchant itérativement les *seuils* optimaux s_m ayant fixé les *représentants* \hat{s}_m puis en faisant de même avec les représentants une fois les seuils fixés au lieu de rechercher directement un couple (s, \hat{s}) optimal. Le modèle proposé ici permet tout d'abord de réinterpréter cet algorithme dans un cadre stratégique : C choisit s « face » à a ; A choisit a « face » à s . L'algorithme de Lloyd-Max implémente ainsi itérativement la MR d'un agent face à la stratégie fixée de l'autre agent. En théorie des jeux, ceci s'appelle la *dynamique de meilleure réponse* [5]. On sait en particulier que, dans le cas où les deux agents partagent la même utilité ($b = 0$), le jeu considéré appartient à la classe des jeux de potentiel (même d'« équipe »), qui possède des propriétés fortes concernant la dynamique de MR [5]. Dans le cas stratégique où les utilités sont distinctes ($b > 0$), la même dynamique s'applique jusqu'à (éventuellement) satisfaire une condition de stabilité, ayant atteint un équilibre. Le résultat suivant montre que sous des hypothèses faibles concernant $p(\cdot)$, la dynamique de MR converge dans le modèle proposé ici.

Proposition 4. *Si $p(\cdot) > 0$, alors la dynamique de MR converge et le point de convergence (s^*, a^*) obtenu est un équilibre du jeu de quantification stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$.*

Démonstration. Les étapes de la preuve sont les suivantes : 1. montrer que $MR^C(a_m, a_{m+1})$ (resp. $MR^A(s_{m-1}, s_m)$) est croissante en a_m et a_{m+1} (resp. en s_{m-1} et s_m) ; 2. montrer que la preuve de [6], écrite initialement dans le cas de la quantification classique et utilisant des arguments de machines à nombre d'états fini, s'étend en fait au cas traité ici dès que les fonctions de MR sont monotones en leurs deux arguments. \square

Enfin, il est possible d'obtenir un résultat concernant la vitesse de convergence de la dynamique de MR.

Proposition 5 (Composée des MR Lipschitz). *Dans le cas d'une distribution uniforme $p(\cdot)$ et d'un coût réseau quadratique $c(a) = a^2$, la composée des MR, $MR^A \circ MR^C$, est $\frac{\sqrt{15}}{4(1+b)}$ -lipschitzienne pour $\|\cdot\|_2$ sur \mathcal{S}^M .*

La preuve, essentiellement calculatoire, n'est pas donnée ici par manque de place. Ceci permet d'obtenir une autre preuve de la convergence de la dynamique de MR dans le cas particulier de la Prop. 5. De plus, cela donne le nombre d'itérations maximum de cette dynamique en fonction du biais b .

Corollaire 6 (Vitesse de convergence de la dynamique de MR). *Si $p \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et le critère d'arrêt de la dynamique de MR est $\|\mathbf{a}^{(n^{\text{STOP}})} - \mathbf{a}^{(n^{\text{STOP}}-1)}\|_2 \leq \eta$, alors $n^{\text{STOP}} \leq 1 + \lceil \frac{1/2 \log(M) - \log(\eta)}{\log(4(1+b)) - 1/2 \log(15)} \rceil$.*

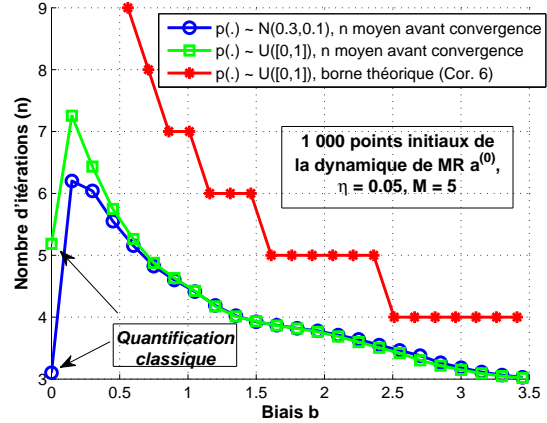


FIGURE 4 – Vitesse de convergence de la dynamique de MR. 1. La convergence est rapide dans les cas extrêmes b petit (quantification classique) / grand (intérêts très divergents) ; 2. La borne théorique est précise pour b grand.

Ceci se montre en utilisant des opérations standards sur les fonctions lipschitziennes. Remarquons au passage que cette borne est croissante (resp. décroissante) avec M (resp. b) ce qui semble relativement intuitif. Ceci est illustré par la Fig. 4.

3 Conclusion

Le modèle présenté dans cet article permet d'analyser les différences entre la quantification scalaire classique et un cas où la quantification devient stratégique. Ceci élargit en particulier de manière utile la méthode de Lloyd-Max à une classe de problèmes plus large, avec une illustration concrète ici dans le cadre des Smart Grid. Étendre certains résultats présentés ici au cas d'un coût plus général que le coût quadratique serait une suite logique à ce travail. L'unicité de la partition obtenue par la dynamique de meilleure réponse est aussi une question intéressante, vues les conditions restrictives données dans [3].

Références

- [1] S. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *Information Theory, IEEE Tr. on*, vol. 28, no. 2, pp. 129–137, 1982.
- [2] C. Wu, H. Mohsenian-Rad, and J. Huang, "Vehicle-to-Aggregator Interaction Game," *Smart Grid, IEEE Tr. on*, vol. 3, no. 1, pp. 434–442, 2012.
- [3] V. P. Crawford and J. Sobel, "Strategic information transmission," *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, vol. 50, no. 6, pp. 1431–1451, 1982.
- [4] B. Larrousse, O. Beaudé, and S. Lasaulce, "Crawford-sobel meet Lloyd-Max on the grid," in *ICASSP, IEEE International Conference*, 2014, pp. 6127–6131.
- [5] S. Lasaulce and H. Tembine, *Game theory and learning for wireless networks : fundamentals and applications*, Elsevier, Ed. Academic Press, 2011.
- [6] X. Wu, "On convergence of Lloyd's method I," *Information Theory, IEEE Tr. on*, vol. 38, no. 1, pp. 171–174, 1992.